$$=\frac{|\overrightarrow{DA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2}{2}.$$

设 AB 与 CD 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\frac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2AB\cdot CD}|$.

虽然这个结论与三角形的射影定理相差甚远，但是学生可以从中感受到思想方法的普适性，体会到再思考的乐趣．而且，这个结论是有价值的．从推导的过程可以看出，这个结论并不局限于平面四边形，对空间四边形还是成立的．也就是学生通过这个问题推导出空间中一种形式的余弦定理，得到异面直线所成角的向量求解公式．

此外，还可以引导学生思考：若将平面推广到空间又会有怎样的结论？通过对这个问题的思考，引导学生确定类比对象，得到合理的类比结论，帮助学生发展类比推理的思维．例如将平面中边的投影类比到空间中面积的投影，就会得到空间的射影定理．那么学生自然会猜测是否有空间中的余弦定理、正弦定理．虽然囿于现有的知识储备（涉及向量外积运算），学生可能无法得到正确的猜想并证明，但激发学生的求知欲、提高对数学学习的兴趣也是教学目的之一．而且其中从平面到空间的推广过程中，蕴含的思想方法是一致的，只是降维的对象不同．因此教师可布置为项目作业，提供相关资料，让学生在课后开展探究与拓展性学习，尝试对问题进行分析与解决，培养知识迁移能力，促进深度学习．

3 结语

习题教学不是简单的解题思路的教学，教师要从问题本质、思想方法上发现它们的整体性、联系性，才能在教学中创造性地使用习题，激活学生思维，延伸教学内容，拓展教学资源，真正地实现习题的教育价值．

参考文献

[1]郑毓信．聚焦“习题教学”（续）——“复归”后的感受与思考[J]．中学数学教学参考（中旬），2021（6）：2-3，36

[2]刘抒睿．正弦定理、余弦定理、射影定理等价性证明[J]．数学学习与研究，2017（23）：150

[3]周宁．基于数学理解的平面向量应用教学——以“余弦定理、正弦定理”的教学为例[J]．中小学数学（高中版），2021（4）：35-37

[4]陈卫明．在降维转化中实现投影向量教学的升华[J]．数学教学通讯，2021（6）：72-78

（本文系福建省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“基于核心素养的农村校高中数学校本作业设计研究”（课题编号：Fjjgzx21-327）的研究成果之一）

培养识图用图能力　发展数学核心素养

叶诚理[1]　　林新建[2]　　林品玲[1]

1 福建省福清第一中学（350300）　2 福建省福清进修学校（350300）

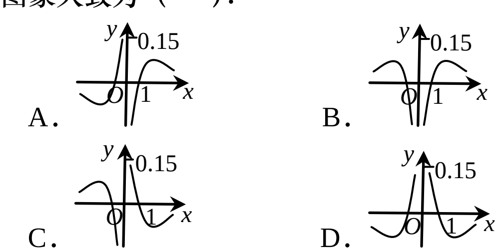
函数图象问题历来是高考数学中的核心考点，涉及到画图、识图、用图这三个方面．函数是高中数学中的重要概念之一，研究函数问题可以借助于图象直观获得．而高考中通常涉及到一些复杂函数，比如分段函数、复合函数、抽象函数等，学生在解决这一类问题中往往找不到切入点，甚至无从下笔．为此，本文结合近来高考试题和各地真题，聚焦如何培养学生识图用图能力，发展数学核心素养，与读者分享．

1 函数图象问题解题中的解题策略

函数图象虽千变万化，但遵循一定的解题策略．其中，牢固掌握各种基本初等函数的图象是解决函数图象问题的前提，灵活应用函数性质是解题的基础，熟练掌握常见图象的变换是解题的保证，包括平移变换、对称变换、伸缩变换和翻折变换等．

1.1 由函数的解析式识别图象

例 1 （2021 年高考天津卷·3）函数 $y=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图象大致为（　　）．



解析 由函数的解析式可得 $f(-x)=\frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2}=$

$f(x)$，则函数 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，选项A，C错误；当 $x>1$ 时，$y=\dfrac{\ln x}{x^2+2}>0$，选项D错误，故选B．

评析 由函数的解析式识别图象的解题策略有：

（1）从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置；

（2）从函数的单调性，判断图象的变化趋势；

（3）从函数的奇偶性，判断图象的对称性；

（4）从函数的特殊点，排除不合要求的图象；

（5）从函数的周期性，判断图象的循环往复．

1.2 由函数的图象辨析函数的解析式

例2（2019年山东省九校高三上学期联考·5）若函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图1所示，则 $y=f(x)$ 的解析式可以为（　　）．

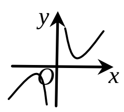


图1

A．$f(x)=\dfrac{x}{2^x+2^{-x}}$　　B．$f(x)=\dfrac{x}{2^x-2^{-x}}$

C．$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}$　　D．$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}$

解析 对四个选项解析式分析发现，B，D两个选项均为偶函数，图象关于 y 轴对称，与题不符，故排除；用极限思想分析，$x\to0^+$，$2^x+2^{-x}\to2$，$\dfrac{x}{2^x+2^{-x}}\to0$，选项A错误；$x\to0^+$，$2^x+2^{-x}\to2$，$\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}\to+\infty$，选项C符合题意，故选C．

评析 由函数的图象辨析函数的解析式的解题策略有：

（1）观察函数的对称性，判断函数的奇偶性；

（2）观察图象所在象限，判断函数的定义域和值域；

（3）从图象的发展趋势，观察函数的单调性．

结合上面的信息进行对函数解析式的排除．

2 函数图象问题解题中核心素养的培养

2.1 抽象问题中培养数学抽象

例3（2021年5月质检福州卷·16）函数 $f(x)=(x^2-10x+26)e^x$，若 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立，则满足条件的一个区间 I 可以是________（填写一个符合题意的区间即可）．

解析 本题为开放试题，若 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立，根据这个抽象条件，通过数形结合，画出 $f(x)$ 草图（如图2），化归转化成函数 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数，则在区间 I 上满足 $f''(x)<0$．由 $f(x)=(x^2-10x+26)e^x$，可得 $f'(x)=(x^2-8x+16)e^x$，则 $f''(x)=(x^2-6x+8)e^x=(x-2)(x-4)e^x$．又由 $f''(x)<0$，解得 $2<x<4$，所以符合题意的区间为 $(2,4)$ 或区间 $(2,4)$ 的一个子区间．

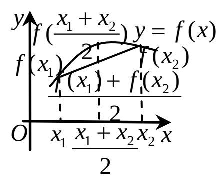
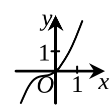
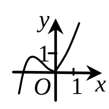


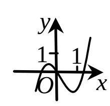
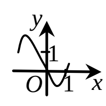
图2

评析 解决抽象函数问题，我们可以从数量关系、图形关系中抽象出相关的数学概念，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并用数学语言予以表征，比如，遇到条件 $(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]<0$，便可由图象的变化趋势抽象出 $f(x)$ 在某个区间上单调递增，从而积累从具体到抽象的活动经验，把握函数的本质，用数学抽象的思维方式思考并解决问题．

2.2 分类问题中培养逻辑推理

例4（2020年省检福建卷·文7）函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 的图象不可能是（　　）．

A．　　B．

C．　　D．

析 本题以三次函数图象为载体，考查了含参数的函数的极值点分布问题．由 $f'(x)=x^2+2x+a$，令 $f'(x)=0$，可得 $x^2+2x+a=0$，

（1）若 $\Delta=4-4a\le0$，即 $a\ge1$，则 $f'(x)\ge0$，得到 $f(x)$ 无极值点，排除A；

(2)若$\Delta=4-4a>0$，即$a<1$，设两根为x_1，x_2，且$x_1\le x_2$，则由韦达定理得$x_1+x_2=-2$，观察C选项，图象的极大值点和极小值点和为正数，故不可能为$f(x)$的图象，选C．

评析 解决分类函数问题，要找到分类的依据，进行逻辑地思考问题，在复杂的情境中把握事物发展的脉络，结合相关函数图象，形成有条理、合乎逻辑的思维品质．

2.3 实际问题中培养数学建模

例5 如图3，ΔAOD是一直角边长为1的等腰直角三角形，平面图形OBD是四分之一圆的扇形，点P在线段AB上，$PQ\perp AB$，且PQ交AD或交弧DB于点Q，设$AP=x(0<x<2)$，图中阴影部分表示的平面图形APQ（或$APQD$）的面积为y，则函数$y=f(x)$的大致图象是（　　）．

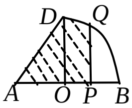
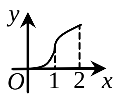
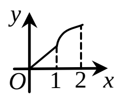
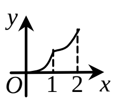
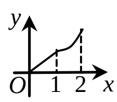


图3

A．

B．

C．

D．

解析 依题意数学建模，构建函数模型．观察可知阴影部分的面积y的变化情况为：

(1)当$0<x\le 1$时，$y=\frac{1}{2}x^2$，y随x的增大而增大，而且增加的速度越来越快；

(2)当$1<x<2$时，由扇形的凹凸性，y随x的增大而增大，而且增加的速度越来越慢．

分析四个答案，只有选项A符合条件．

评析 解决实际函数问题，要对现实问题进行抽象，从数学的视角出发，确定自变量和目标函数，建立数学模型，可进行定量计算或定性分析，考查函数的变化趋势，绘制函数图象，检验模型，最终分析和解决实际问题．

2.4 在动态问题中培养直观想象

例6 （2018年高考全国Ⅰ卷·理9）已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$．若$g(x)$存在2个零点，则a的取值范围是（　　）．

A．$[-1,0)$　　B．$[0,+\infty)$

C．$[-1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

解析本题考查了分段函数的零点问题．函数$g(x)=f(x)+x+a$存在2个零点，即关于x的方程$f(x)=-x-a$有2个不同的实根，即函数$f(x)$的图象与直线$y=-x-a$有2个交点，作出直线$y=-x-a$与函数$f(x)$的图象，由图4可知，$-a\le 1$，解得$a\ge -1$，故选C．

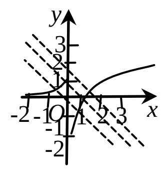


图4

评析 解决动态函数问题，要建立形与数的联系，利用几何图形描述问题，借助几何直观理解问题，从中提升学生数形结合能力和化归转化能力，在具体的情境中感悟事物的本质．

2.5 含参问题中培养数学运算

例7 已知函数$f(x)=\frac{|x|}{x+2}$，如果关于x的方程$f(x)=kx^2$有四个不同的实数解，求实数k的取值范围．

解析 （法1）$f(x)=\frac{|x|}{x+2}=kx^2$，显然$x=0$为方程一个根，即$\frac{1}{x+2}=k|x|$必有三个不同的非零实根，即函数$y=\frac{1}{x+2}$和$y=k|x|$的图象有三个不同的交点（如图5）．而两函数图象在第二象限相切时为临界状态，可求得$k=1$，观察图形求得实数k的取值范围是$k>1$．

（法2）$k=0$时，显然不符合题意，故$\frac{1}{x+2}=k|x|$可同解变形为$\frac{1}{k}=|x|(x+2)$，即转化成函数$y=|x|(x+2)$与常数函数$y=\frac{1}{k}$的图象有三个不同的交点，观察图6可知$0<\frac{1}{k}<1$，即$k>1$．

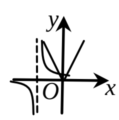


图5

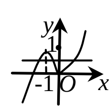


图6

评析 以上两种解法虽属数形结合法，但第二

种方法更优越：图易画，计算量小．这给我们启示，对含参问题进行数形结合解法前，有必要对所给等式作适当的变形，使得等式两边的函数图象易画，几何意义更明显，代数计算更简单．因此，对含参问题用数形结合运算时，要掌握运算法则、理解参数几何意义、探究运算思路，达到多思少算的目的，养成规范化思考问题的目的．

3 教学感悟

总之，识图用图能力的培养不是一朝一夕的事情，需要学生牢固掌握函数的基础知识，灵活运用各种数学思想方法解题．教师要引导学生不断积累解题经验，树立函数性质的整体观念，加强规范作图训练，在解题中感知数学的美，体会事物的运动变化，培养学生养成善于思考、严谨求实的科学精神，不断提升思维品质，发展数学核心素养．

参考文献

[1]教育部．普通高中数学课程标准（2020修订版）[M]．北京：人民教育出版社，2020

[2]林新建．我的教学主张：自然数学[M]．厦门：厦门大学出版社，2020

温故知新　融会贯“深”

孔伟伟　　江苏省南京市金陵中学仙林分校中学部（210023）

在苏教版八年级下册“三角形中位线”教学后，笔者认为拓展“梯形的中位线”对学生后续学习很有必要（苏教版教材并未安排这节课），不仅是对平行四边形一章知识的综合复习，同时引导学生开展主动思考、进行深度学习．

1 学情分析

梯形的中位线是在学生已经学习了平行四边形、矩形、正方形和三角形中位线后的一节拓展课，重点研究证明梯形中位线定理．有了三角形中位线的学习经验，学生对梯形中位线定理的猜想和证明有了基本认识和迁移基础，学生有能力会从三角形中位线入手，从图形的认知规律入手，探索梯形中位线定理．几何教学不是仅仅要让学生知道是什么，更注重的是学生知识的建构，学生思维方式的培养．

2 教学目标

（1）能够类比三角形中位线定理，说出梯形中位线定理；

（2）经历“观察——猜想——证明”的过程，从不同的角度证明梯形中位线定理，体会类比、转化、等面积法、数形结合等数学思想方法；

（3）在探索过程中培养合理的逻辑推理能力、严谨的语言表达能力，体验几何发现的乐趣．

3 教学准备与教学交流

3.1 教学准备

课前准备：每位同学画一个梯形，取两腰的中点并连接，请你度量它的长度，并猜想这条线段是否具备什么特殊之处？猜想并思考如何验证？

3.2 教学过程

问题1 之前研究了三角形的中位线，那什么是三角形的中位线？三角形中位线的性质是什么？

问题2 类比三角形的中位线，梯形中有类似的线段吗？你能猜想梯形的中位线有什么性质吗？

已知：在梯形$ABCD$中，$AD//BC$，点E,F分别为线段AB,CD的中点．求证：$EF//BC$，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$．

方法1 生：如图1，连接AF，使得$AF=FG$，连接CG．

师：为什么会想到这么做?

生：由中点想到倍长中线，$\Delta ADF\cong\Delta GCF$，梯形$ABCD$转化成$\Delta ABC$（其中$B,C,G$三点共线），结论得证．

方法2 生：如图2，在AD上任取一点G，连接GF,GE并延长，分别交直线BC于点N,M．

师：为什么会想到这么做?

生：还是运用转化的思想，运用两个中点，将梯形从两侧分割，从而将梯形转化成三角形．

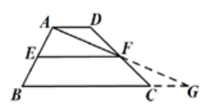


图1

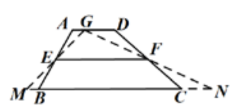


图2

方法3 生：如图3，连接AC，取AC的中点G，