递增的有序数组，则 $\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\ge\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$．不妨设 $a\le b\le c\le d$，故 $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\ge\frac{a+b+c+d}{4}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}$，即得到 $a^2+b^2+c^2+d^2\ge\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2$．

推广 2 已知 $a_i\ge0(i=1,2,\cdots,n)$，满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\lambda$，求证 $\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2^3+a_2^2+a_2+3}+\frac{a_1+a_2+a_4+\cdots+a_n}{a_3^3+a_3^2+a_3+3}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n^3+a_n^2+a_n+3}+\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1^3+a_1^2+a_1+3}\ge\frac{n-1}{3}\lambda-\frac{n-1}{6n}\lambda^2$．

证明方法与推广 1 相同，证明过程省略．

参考文献

[1]冯建波．数学问题与解答 2448[J]．数学通报，2018（10）：64-66

问题导之，思想渗之，明暗织之

——“函数的单调性”的教学设计与反思

郭海萍[1]　林新建[2]

1 福建省福清第一中学（350300）　2 福建省福清市教师进修学校（350300）

杜宾斯基认为：任何一个数学教育中的理论或模型都应该致力于对“学生是如何学习数学的”以及“什么样的教学计划可以帮助这种学习的理解”．

本文试图以《普通高中教科书·数学选择性必修第二册》（人教 A 版）第五章《一元函数的导数及其应用》中“函数的单调性”的教学为例，来呈现知识之间的纵向联系，置知识于系统之中，体会数学内容的整体关联性，促进学生理解数学知识，感悟数学思想，进而把握数学本质，发展核心素养．

1 课堂教学过程及说明

1.1 数学情境，引发认知冲突

问题 1 研究函数 $f(x)=x-\ln x-1$ 的单调性，你能用已学过的方法判断吗?

追问 过去我们是怎样讨论函数在其定义域内的单调性?判断函数单调性的常用方法有哪些?

问题 2 函数的单调性能够刻画函数的变化趋势，函数的瞬时变化率即导数也可以刻画函数的变化趋势，那么函数的单调性与导数之间有何关系呢?能用导数研究函数的单调性吗?

师生活动设计 教师提出问题 1，并通过追问，引发学生思考，发现用所学的方法从“形”和“数”两个角度均难以判断此函数的单调性，认识到定义法和图象法的局限性，引发认知冲突，产生探究新方法的求知欲，此时教师顺势引出问题 2，并揭示课题，自然而然．

设计意图 创设合适问题情境，引导学生尝试运用所学方法解决非基本初等函数的单调性，引发认知冲突，产生疑惑，激发学生主动学习新知识的热情，启动思维，让学生认识到引入导数法研究函数单调性的必要性．

1.2 数学探究，感知对应关系

问题 3 如图 1，做出函数 $f(x)=x-\ln x-1$ 及其导数 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$ 的图象，并进行观察，你能从直观上感知它们之间的对应关系吗?

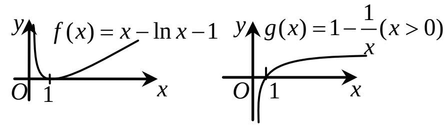


图 1

师生活动设计 教师提出问题 3，引发学生思考，先画出原函数图象，再作出其导函数图象，教师引领学生观察发现：当 $x\in(0,1)$ 时，函数 $f(x)=x-\ln x-1$ 单调递减，相应地，其导数 $f'(x)=1-\frac{1}{x}<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)=x-\ln x-1$ 单调递增，相应地，其导数 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，从“形”的角度初步感知函数单调性与其导数的正负之间存在对应联系．

设计意图 借助画图软件工具进行直观探究，从“形”的角度初步感知函数单调性与其导数正负

之间的关系，这个过程中，学生经历观察、猜想的过程，从中发现问题，有益于培养学生的数学能力．

1.3 数学体验，概括内在关系

问题 4 上述判断是否正确？如何验证你的判断呢？

师生活动设计 不妨就基本初等函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\ln x$，让学生动手画图（如图 2)，在同一个坐标系中分别做出函数与其导函数的图象，引导学生观察、思考、讨论，再次从"形"的角度感知函数单调性与其导数的正负之间关系，从中发现问题，并提出问题，验证了上述的判断．

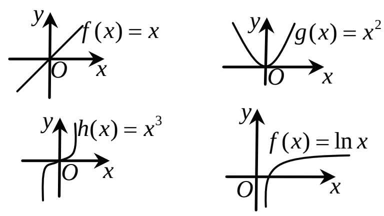


图 2

设计意图 为了验证函数的单调性与其导数正负之间的关系，引导学生从熟悉的基本初等函数入手，让学生动手操作，从"形"的角度直观感知导数与函数单调性的关系，学生经历观察、猜想、归纳的过程，有益于发展学生的直观想象素养．

问题 5 请完成下列表格，你能从中概括出导数的正负与函数的单调性之间的关系吗？

函数	$f(x)=x$	$g(x)=x^2$	$h(x)=x^3$	$F(x)=\ln x$
函数单调性				
导数的符号				

设计意图 经历由"形"到"数"，引领学生初步概括导数的正负与函数单调性的关系，培养和发展学生的直观想象和数学抽象核心素养．

追问 导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，以 $f(x)=x^2$ 为例（如图 3），请大家结合切线斜率来观察二次函数 $f(x)=x^2$ 在对称轴左右两侧单调性情况？

师生活动设计 为验证猜想，教师采用追问方式，借助几何画板动态演示，引导学生从导数几何意义出发，验证导数的正负与函数单调性的关系，这样既降低了学生的思维难度，又有较好的直观感知．从中概括出：一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果在某区间 **D** 上 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在该区间上单调递增；如果在某区间 **D** 上 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在该区间上单调递减．

设计意图 由特殊到一般，由具体到抽象，引领学生进一步概括导数的正负与函数单调性的关系．学生在观察、猜想、归纳、提炼中体验知识的发现、发生过程，并尝试将已有的图形语言，用文字语言和符号语言精准地表达出来，发展数学抽象和数学建模的核心素养．

1.4 数学内化，理解本质关系

问题 6 联系函数单调性的定义，并思考在某个区间上单调的函数 $y=f(x)$ 其平均变化率的几何意义与 $f'(x)$ 的正负关系，你能解释为什么可以由函数在某区间上的导数的正负来判断函数在该区间上的增减性？

师生活动设计 教师引导学生从函数单调性定义与导数定义找到函数单调性与导数的本质关系，根据学生回答的情况，教师给予适当启发和拓展．

从函数单调性的定义出发，对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，若函数 $f(x)$ 是区间 $D(D\subseteq I)$ 上的增函数，则对于属于区间 $D(D\subseteq I)$ 的任意两个自变量的值 x_1, x_2，有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$，即函数 $y=f(x)$ 在区间 D 的平均变化率大于 0．

从"形"的角度看，函数 $y=f(x)$ 其平均变化率的几何意义是经过 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 两点的割线斜率，从而得出若函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，则函数 $y=f(x)$ 在区间 D 的图象上任意两点割线斜率大于 0；反之，也成立．

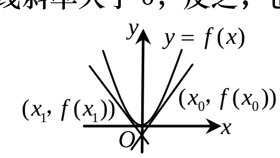


图 3

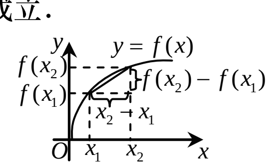


图 4

再通过追问，由逼近思想，研究切线的斜率与函数的单调性的关系．在区间 D 内，割线的斜率可以反映曲线的平均变化趋势，当其中一点无限逼近另一点时，割线就成了该点处的切线，切线的斜率（导数的几何意义）反映的是曲线的瞬时变化趋势．若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 的图象上任意一点处切线的斜率为正（$f'(x)>0$），则在区间 D 的图象上任意两点割线斜率为正，从图象变化趋势上看函数在该区间内呈上升趋势，即函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递增．

最后，从"数"的角度，回到导数定义，揭示

导数与函数单调性的本质关系．若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上的导数 $f'(x)>0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$（其中 $x_1,x_2\in D$，$x_1\ne x_2$），得函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是单调增函数．（让经过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的割线进行平行移动，直到与函数 $y=f(x)$ 图象相切，设切点为 $(x_0,f(x_0))$，则存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)$）

导数正是函数平均变化率的极限，所以我们从对应的数学定义中找到了导数的正负与函数单调性的本质关系．

设计意图 遵循最近发展区原理，激发学生思维，他们既学会从“形”直观观察得到结论，又能从“数”的角度，抓住导数和函数单调性的定义之间的联系来提炼结论，呈现了知识之间的纵向联系，让学生体会到函数单调性定义、割线的斜率、导数三者的密切相关，认识到用导数法研究函数单调性具有一般性．从数学角度发现结论、论证结论，在此过程中渗透“猜想—归纳—论证”的思想方法，让学生体验到研究数学问题时，既要有直观感受，也要重视推理证明，从中培养学生严谨的思维习惯，提升其逻辑推理素养．

1.5 数学应用，迁移运用关系

例 1 已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f'(x)$ 的图象如图 5 所示，试画出 $f(x)$ 的图象大致形状．

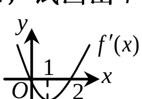


图 5

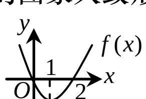
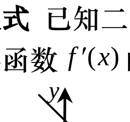
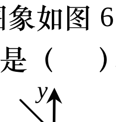
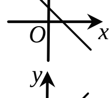


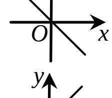
图 6

变式 已知二次函数 $f(x)$ 的图象如图 6 所示，则其导函数 $f'(x)$ 的图象大致形状是（　　）．

A．


B．


C．


D．


师生活动设计 教师提出例 1，学生思考回答，先根据导数的符号确定原函数的单调性，从而画出原函数的大致图象，此例具有一定开放性，学生得出的函数图象不唯一，只要抓住了问题的本质即可．同时教师将问题进行适当变式，由已知原函数图象去确定对应导函数的大致图象，加深对导数正负与原函数增减性之间的关系的理解．

设计意图 对原函数图象与导数图象进行对照探讨，经历由“数”到“形”、由“形”到“数”的过程，意图是让学生深入理解导数与函数单调性之间的关系，感悟数形结合、化归与转化思想，从而发展学生直观想象、逻辑推理的核心素养．

例 2 判断下列函数的单调性并求其单调区间．

（1）$f(x)=x^2+2x-3$；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$；

（3）$f(x)=\mathrm{e}^x-2x$；

（4）$f(x)=\sin x-x$，$x\in(0,\pi)$．

师生活动设计 教师提出例 2，引导学生思考解决问题的几种方法，比较方法的优缺点．对于较复杂函数（如由多个基本初等函数经四则运算后得的新函数），用导数法来研究其单调性．教师示范第（2）题解题过程，帮助学生掌握用导数法研究函数单调性的规范步骤．解题后，要求学生根据函数单调性作出其大致图象，建立“数”到“形”的联系，教师再用画图软件画出函数图象，与所求结果进行对照，强调导数法在研究函数单调性的一般性．

设计意图 通过新旧方法的对照，加深了对新知的理解，开拓了学生的思维，在研究函数单调性后，要求学生根据函数单调性作出其大致图象，使学生经历由“数”到“形”的思维过程，再次感悟导数法研究函数单调性的一般性、有效性和优越性，同时，强调运算要准确，步骤要规范有条理，从中发展学生数学运算和逻辑推理的核心素养．

2 几点思考

（1）问题导之，发展能力．教师精心创设问题，通过问题引领，激活学生思维，使得在知识产生的必要性中体悟知识的内涵，在自主探究活动中体验数学发现的过程，在最近发展区中积累活动经验并获得新知，从中学会发现问题，并提出问题，学会分析问题，并解决问题．

（2）思想渗之，培育素养．本节除了关注教学的逻辑性，教师还关注知识的思想性，诸多环节渗透着特殊到一般、数形结合、化归与转化的数学思想，教师遵循知识的发生发展规律及学生的认知自然规律，引导学生思考、体验、内化、理解，使学生真正理解知识，领悟思想，进而提升学生的数

学核心素养．

（3）明暗织之，把握本质．本节从引入导数法研究函数单调性的必要性，到导数法研究函数单调性的一般性，再到导数法处理函数单调性问题的优越性，层层递进，揭示导数、直线斜率和函数单调性的本质关系，以此构建了知识的明线．同时，还有特殊到一般、数形结合、化归与转化的数学思想这一“知识暗线”贯穿着数学知识发生发展的全过程．在提出问题，探究问题，解决问题，应用体悟的“活动明线”中，学生经历着从认知冲突到激发思维，从动手操作到归纳概括，从直观感知到代数阐述，从浅层认知到深入理解的思维“活动暗线”，明暗交织，使学生逐步掌握数学研究的一般方法，把握数学本质．

参考文献

[1]中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018

[2]林新建．我的教学主张：自然数学[M]．厦门：厦门大学出版社，2020

（本文系福建省教育科学“十三五”规划2020年度课题“基于深度学习的高中数学函数主题单元教学实践研究”（FJJKXB20-724）的阶段性成果）

概念教学，让思维拾级而上

——以人教版七年级下册“平移”的教学思考为例

陈靖涛　　北京师范大学厦门海沧附属学校（361026）

数学概念是抽象的产物，推理的基础，模型应用的前提．如何开展概念教学是数学教师研究和关注的重要课题．笔者认为概念教学应当遵循层级发展，在不同的阶段设计合适的教学环节，实现层层深入，最终提升数学学习品质，培育数学核心素养．

1 概念教学

罗增儒教授指出，“数学概念是数学血肉细胞，数学思想是数学肌体的灵魂[1]．一个没有血肉、没有灵魂的人，即使穿上华丽的外衣，也是僵尸；同样，没有数学概念做血肉，没有数学思想做灵魂，即使给解题穿上华丽的外衣，也是僵尸数学”[1]．

数学概念是抽象的产物、推理的基础、模型应用的前提．掌握概念是一切数学活动的开始．数学概念是数学的细胞，更是数学的灵魂．数学教学离不开概念教学，数学概念教学是数学教学的核心．

2 有层次地认识平移

从《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标》）看，平移是“图形的变化”领域中一块重要的内容．让图形在头脑中动起来，有助于学生几何直观能力的培养．通过图形的平移探寻不变的几何性质，是学生以“运动”视角研究图形的开篇．因此，平移概念的教学至关重要．

《课标》在不同学段，对平移提出了不同的要求．从内容上看，平移是在对平行线充分认识的基础上展开的，是平行线的一个应用．这里的应用更多是指赋予学生“平行线”的视角观察平移的眼光，是在知识储备已经提高了观察品质之后进行的学习，与前两个学段的学习有着本质的区别．

笔者认为，在平移概念的教学中，对平移的认识有以下五个层级．

层级 1 在平移现象中，对平移有感观认知，这时对平移的认识是感性朦胧的、模糊的，是平移概念形成的原始感性素材．

层级 2 在描图操作中，体会只有“方向”和“距离”两个要素的共同参与，才能完成图形的平移．这时对平移的认识是感性具体的、直观的，能为进一步探究提供操作素材．

层级 3 在观察和思考中，归纳概括平移的本质特征，得到“新图形与原图形全等”和“对应点连线平行且相等”两条性质．认识到点的平移是图形平移的本质，虽然图形不同，点的选取不同，但点的运动规律相同．这时对平移的认识是理性具体的，对平移运动的关注点实现从整体到局部的转换，复杂图形的平移转化成了简单的“点”的平移，对平移的认识从感性走向理性，是思维品质质的飞跃．

层级 4 形成平移的概念，在利用“对应点”实现平移的作图或者图案设计的过程中，充分感受给定平移方向和距离就确定了平移，给定一对对应点也就确定了平移．这时对平移的认识是理性抽象的，是“精致”的概念，不仅可以从万千变化中识别和区