$|\vec{m}|=\sqrt{2(1-\vec{b}^2)}$, $\vec{a}=\vec{m}-\vec{b}$;

步骤 3. 则 $|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{m}-3\vec{b}|$;

步骤 4. 由不等式(*)可得 $|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{m}-3\vec{b}|\leqslant|\vec{m}|+|3\vec{b}|=\sqrt{2(1-\vec{b}^2)}+|3\vec{b}|$, 令 $|\vec{b}|=\cos\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 则 $|\vec{a}-2\vec{b}|\leqslant\sqrt{2(1-\vec{b}^2)}+|3\vec{b}|=\sqrt{2}\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{11}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\sqrt{11}$, (其中 $\tan\varphi=\frac{3\sqrt{2}}{2}$). 所以 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 的最大值为 $\sqrt{11}$.

评析:本拓展当中所给的条件只有一个,并且还不是一眼就能看出来的已知模长. 我们先选定其中一个向量 $\vec{b}$ 作为基底的一个向量,并假定 $|\vec{b}|$ 已知. 在此基础上,通过换元、配方获取基底的另外一个基向量. 最后问题还是回到了最初的模样,利用向量三角不等式 $||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqslant|\vec{a}\pm\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$, 得到问题所求的最大值,然后通过三角换元求解最大值的最大值.

5. 小结反思升华

本文通过立足构建平面向量"基底",使平面向量取值范围问题得以转化,并最终应用已知不等式让问题得以解决. 通篇下来,我们通过一题多变,构造出多个看似不同的问题,实质上具有很大相似性的问题,反反复复通过构造新"基底",让不同的问题转化为相似的问题,用相类似的方法解决问题,揭示了这些问题所蕴涵的共性解决思路背后所隐藏的奥秘. 实现了多题一解的目的,让我们在解题教学过程中收获了一次思维上的体操训练.

在高中数学教学过程中,我们无法回避解题教学,如何解题? 如何让解题快速有效? 如何让问题的解决有助于学生对数学知识的理解与掌握? 如何让数学问题焕发出新的生机与活力? ……这诸多问题,不仅是高中学生孜孜不倦想要获得答案的问题,也是我们高中一线数学教师一直津津乐道的问题,更是数学研究工作者为之付出辛苦汗水兢兢业业想要解决的问题.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018.
[2]史宁中,王尚志. 普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M]. 北京:高等教育出版社,2018.
[3]普通高中教科书数学 A 版选择性必修第二册. 北京:人民教育出版社,2019.
[4][美]波利亚. 怎样解题[M]. 徐泓,冯承天译. 上海:上海科技教育出版社,2002.
[5]钟启泉,崔允漷. 核心素养与教学改革[M]. 2018.
[6]人民教育出版社,教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 2019. 11.
[7]现代教育出版社,中国高考报告学术委员会. 高考评价体系解读[M]. 2021. 1.

模型纵然千百变,等距定心是关键*

福建省福清第一中学　(350300)　林琳琳
福建省福清市教师进修学校　(350300)　林新建

多面体外接球问题一直是数学高考的热点,此类问题由于模型多变,难度较大,要求学生有较强的直观感知和空间想象的能力,考生往往难以完美作答. 其实,解决此类问题的关键在于球心位置的确定,考生若能直观问题的本质,依据球心到多面体各个顶点的距离相等,以及球心在各个面上的投影到面上各个顶点的距离也相等,则不难确定出球心的位置,问题也就不难获得解决. 本文给出确定球心位置的四种策略,供借鉴.

1. 依循定义,等距定心

依循多面体外接球的定义,循序找出与各顶点距离相等的点,该点即为多面体外接球的球心,问题随之获得解决.

例 1　(2017 年福建省普通高中毕业班质量检

* 本文系福建省教育科学"十三五"规划 2020 年度立项课题《基于学科融合的高中数学教学设计案例研究》(立项编号:FJJKXB20—694)的研究成果;本文系福清市教育科学研究 "十四五"规划 2021 年度专项课题《"四元五环"教学在高中数学概念教学的实践研究》(立项编号:FQ2021ZX006)的研究成果.

查理数第 10 题)在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA=2\sqrt{3}$,$PC=2$,$AB=\sqrt{7}$,$BC=3$,$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$,则四面体外接球的表面积为(　　).

A. 4π　B. $\dfrac{16}{3}\pi$　C. $\dfrac{32}{3}\pi$　D. 16π

解析:由$\triangle ABC$为直角三角形,知斜边 AC 的中点 O 到 A,B,C 三个顶点的距离相等;进而由$\triangle PAC$是直角三角形,AC 是斜边知 AC 中点 O 到 A,P,C 三个顶点的距离也相等,从而 O 到 P,A,B,C 四个顶点的距离都相等,所以 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心. 设 R 为外接球的半径,则 $R=\dfrac{1}{2}AC=2$,故四面体外接球的表面积 $S=16\pi$,故选 D.

例 2 (2017 年福建省普通高中毕业班 4 月质量检查理数第 10 题)空间四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在同一个球面上,E,F 分别是 AB,CD 的中点,且 $EF\perp AB$,$EF\perp CD$. 若 $AB=8$,$CD=EF=4$,则该球的半径等于(　　).

A. $\dfrac{65\sqrt{2}}{16}$　B. $\dfrac{65\sqrt{2}}{8}$　C. $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$　D. $\sqrt{65}$

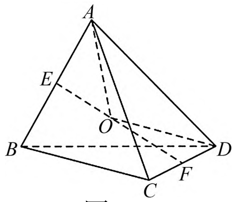

图 1

解析:如图 1,依条件可知,EF 为线段 AB 和 CD 的中垂线,所以线段 EF 上的任意一点到 A,B 两点的距离相等,到 C,D 两点的距离也相等. 当点靠近 AB 时,这个点到 A,B 的距离小,到 C,D 的距离大;当点靠近 CD 时,这个点到 A,B 的距离大,到 C,D 的距离小,由此可知在 EF 上必然存在一个点,这个点到 A,B 的距离与到 C,D 的距离相等,这个点就是外接球的球心 O. 由此,设外接球半径为 R,$OE=x$,则 $OF=4-x$,从而有 $4^2+x^2=R^2$,$2^2+(4-x)^2=R^2$,联立方程解得 $x=\dfrac{1}{2}$,$R=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$,故选 C.

评析:依循定义,先找出与部分顶点距离相等的点,进而判定这是与所有顶点距离相等的点,这是“依循定义等距定心”的关键.

2. 补全形体,等距定心

将多面体的形体补全,如根据三条侧棱两两垂直,将四面体补成长方体或正方体;三对对棱两两相等,将四面体补成长方体等,则可根据对角线交点到各顶点的距离相等确定出球心,进而将问题轻松予以解决.

例 3 (2012 高考辽宁卷理科 16 题)已知正三棱锥 $P-ABC$,点 P,A,B,C 都在半径为$\sqrt{3}$的球面上,若 PA,PB,PC 两两相互垂直,则球心到截面 ABC 的距离为________.

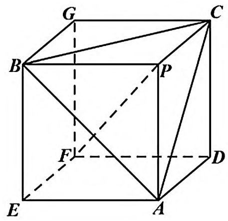

图 2

解析:由于正三棱锥 $P-ABC$ 可以由正方体 $PADC-BEFG$ 截得. 如图 2 所示,则 PF 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的直径,且 $PF\perp$平面 ABC. 设正方体棱长为 a,则 $3a^2=12$,$a=2$,$AB=BC=AC=2\sqrt{2}$. 由 $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$得$\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 2$,又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$,所以 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,因此球心到平面 ABC 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 4 (2019 年全国卷Ⅰ理科第 12 题)已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上,$PA=PB=PC$,$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形,又 E,F 分别为 PA,AB 中点,$\angle CEF=90°$,则球 O 的体积为(　　).

A. $8\sqrt{6}\pi$　B. $4\sqrt{6}\pi$　C. $2\sqrt{6}\pi$　D. $\sqrt{6}\pi$

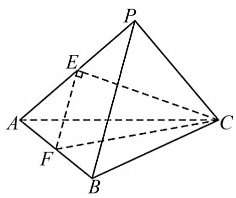

图 3

解析:如图 3,因为 $PA=PB=PC$ 和$\triangle ABC$是等边三角形,故三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥,$PB\perp AC$,又 E,F 分别为 PA,AB 中点,可得 $EF//PB$,推出 $EF\perp AC$,则 $EF\perp$平面 PAC,又 $PB\perp$平面 PAC,则$\angle APB=90°$,所以 $PA=PB=PC=\sqrt{2}$,得到 $PB\perp PA$,$PB\perp PC$. 至此,我们可将三棱锥补充成正方体,PB,PA,PC 是正方体一个顶点处出发的三条棱,正方体的对角线即三棱锥外接球的直径. 三棱锥 $P-ABC$ 为正方体一部分,$2R=\sqrt{2+2+2}=\sqrt{6}$,即 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,则体积为$\sqrt{6}\pi$,故选 D.

评析:依据多面体的特征,判断这是哪一个形体的一部分,进而将其补全,这是“补全形体,等距定心”的关键.

3. 找出投影,等距定心

根据球心到面上各个顶点的距离相等,可知球心在面上的投影到各个顶点的距离也相等,球心在过投影且垂直于平面的直线上,由此可过投影作对应平面的垂线,垂线的交点即为球心.

例 5 三棱锥 $D-ABC$ 的四个顶点都在球 O 球面上,$\triangle ABC$与$\triangle BCD$所在的平面互相垂直,$AB=3$,AC

$=\sqrt{3}$, $BC=CD=BD=2\sqrt{3}$,求四面体外接球的半径.

解析:我们先找出球心在$\triangle ABC$和$\triangle BCD$所在平面上的投影,进而过这两个投影分别作这两个平面的垂线,两垂线的交点即是球心.由于球心到各顶点的距离相等,所以球心在两平面上的投影均为两三角形的外心.由于$\triangle ABC$为直角三角形,所以外心为斜边BC的中点;由于$\triangle BCD$为正三角形,所以外心为三角形的中心.因为$\triangle ABC$与$\triangle BCD$所在的平面互相垂直,所以球心即为$\triangle BCD$的中心,它到B,C,D三个点的距离即是球的半径.由此易知$R=BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=2$.

例 6　(福州市 2021 年高中毕业班第一次质量检测第 15 题)在三棱锥$P-ABC$中,侧面PAC与底面ABC垂直,$\angle BAC=90°$,$\angle PCA=30°$,$AB=3$,$PA=2$.则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为________.

解析:设O_1为$\triangle APC$外接圆的圆心,则$\triangle APC$外接圆的半径$O_1A=\frac{1}{2}\cdot\frac{PA}{\sin 30°}=2$.设三棱锥$P-ABC$外接球的球心为$O$,则$OO_1$平面$APC$,又易知$BA\perp$平面$APC$,所以$OO_1 /\!/ BA$设$BA$的中点为$H$,由$OA=OB$知$OH\perp BA$,所以四边形$OHAO_1$为矩形,且$OO_1=HA=\frac{1}{2}BA=\frac{3}{2}$.至此,在$\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$中,$OA=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=\frac{5}{2}$,即三棱锥$P-ABC$外接球的半径为$R=\frac{5}{2}$,故其表面积$S=4\pi R^2=25\pi$.

评析:解决此类问题关键在于两"心"(外心和球心)的确定,先确定面的外心,再确定球心,这是问题得以解决的关键.

4. 以算代证,等距定心

当寻找或判定球心位置有难度时,我们可以以算代证,通过建立坐标系赋予顶点和球心坐标,进而通过等距得到方程,确定出球心位置.

例 7　(2021 届南京六校联合体高三上联考第 8 题)在三棱锥$P-ABC$中,底面ABC是以AC为斜边的等腰直角三角形,且$AB=2$,$PA=PC=\sqrt{5}$,PB与底面ABC所成的角的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则三棱锥$P-ABC$的外接球的体积为(　　).

A. $\frac{9\pi}{2}$　　B. $\frac{89\sqrt{89}\pi}{6}$　　C. 9π　　D. $\frac{27\pi}{2}$

解析:如图 4,由于$\triangle ABC$为等腰直角三角形,其外心为斜边AC的中点D,故球心O在过点D且垂直于平面ABC的直线l上.连接PD,BD,由$AC\perp BD$,$AC\perp PD$知$AC\perp$平面PBD,又$AC\subset$平面ABC,故平面$PBD\perp$平面ABC.在平面PBD内作$PE\perp BD$于E,则$PE\perp$平面ABC,从而$\cos\angle PBD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.在$\triangle PBD$中,由余弦定理得$\frac{PB^2+BD^2-PD^2}{2\times PB\times BD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,即$\frac{PB^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\sqrt{2}PB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,解得$PB=3$,从而$BE=2\sqrt{2}$(事实上点$E$在线段$BD$的延长线上,点$D$为线段$BE$中点),$PE=1$.以$B$为原点,射线$BC$,$BA$分别为$x$,$y$轴的正方向,建立空间直角坐标系,易得$P(2,2,1)$,$D(1,1,0)$.设球心$O$坐标为$(1,1,z)$,由$OB=OP$得$1^2+1^2+z^2=1^2+1^2+(z-1)^2$,解得$z=\frac{1}{2}$,故$R=\sqrt{1^2+1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{2}$.以三棱锥$P-ABC$的外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{3}{2})^3=\frac{9}{2}\pi$,故选 A.

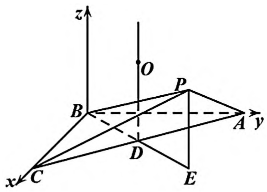

图4

评析:由于建系,我们赋予了点以坐标,将几何推证问题转化为代数运算问题,降低了空间想象的难度,使得解题具体形象,易于操作.

数学高考命题的原则是:以数学内容为主线,聚焦学生对重要概念,定理,方法,思想的理解和应用;注重数学本质,通性通法,淡化解题技巧.故我们在解题过程中,要引领学生如何利用数学本质来解题,而不是一味讲授解决此类问题应具备有什么样的技巧.只要基于问题本质,不管模型如何改变,题目如何变化,都会使学生从"山重水复疑无路"的窘迫中解脱,感受到"柳暗花明又一村"的惊喜.

参考文献

[1]普通高中数学课程标准(2020 修订版)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.6.

[2]林新建.我的教学主张——自然数学[M]. 厦门:厦门大学出版社,2020.9.