和谐促成同构,统一助力直观
——感悟一道新高考数学模拟演练题的解法“美”

郭海萍　福建省福清市第一中学　350300
林新建　福建省福清市教师进修学校　350300

[摘　要] 很多学生认为数学枯燥乏味,其最大原因就是经常陷于“题海”不能自拔,很少从“美”的角度去看待解题.文章以2021年全国统一考试模拟演练第8题为例,从“数学美”的视角出发,分别从“以‘和谐’促成同构”与“以‘统一’助力直观”两方面来引领学生感悟数学中的“和谐美”与“统一美”.

[关键词] 和谐;同构;统一;直观

参数大小比较是近年来数学高考考查的热点之一,这类题目因式子结构杂乱,参数排列无序,给考生的解答带来了极大的困难.为此,教学中教师应引领学生基于“数学美”的视角,挖掘此类问题中的数学关系,并对已知式子作恰当变形,构造出和谐、对称或统一的式子,方便问题的解决.

下面以一道新高考模拟演练题为例,就如何基于数学中的“和谐美”与“统一美”的视角来指引解题作一阐述,以飨读者.

试题:(2021年全国统一考试模拟演练第8题) 已知$a<5$且$ae^5=5e^a$,$b<4$且$be^4=4e^b$,$c<3$且$ce^3=3e^c$,则(　　)

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

考点剖析

本题以比较大小的形式出现,考查函数的图像和性质,考查考生综合应用数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想解决问题的能力,考查数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学核心素养,综合性强、难度较大.

解法探析

题目给出了三个式子及三个参数,且三个参数分别位于三个式子,由于看不出三个参数之间的联系,因此也就无法直接对其进行大小比较.

为此,需要对式子的模型特点作感知,以发掘式子的隐含信息,进而对式子作适当的变形转换,找出参数间的联系,方能有效解决问题.

1. 以“和谐”促成同构

基于“和谐美”对已知式子作恒等变形,得到$\frac{e^5}{5}=\frac{e^a}{a}$,$\frac{e^4}{4}=\frac{e^b}{b}$,$\frac{e^3}{3}=\frac{e^c}{c}$,进而根据式子特征构造出函数$f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$,利用同构函数的单调性和图像解决问题.

解析:由已知可得$\frac{e^5}{5}=\frac{e^a}{a}$,$\frac{e^4}{4}=\frac{e^b}{b}$,$\frac{e^3}{3}=\frac{e^c}{c}$,且$0<a<5$,$0<b<4$,$0<c<3$,构造函数$f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$,从而$f(a)=f(5)$,$f(b)=f(4)$,$f(c)=f(3)$. 因为$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,从而$f(5)>f(4)>f(3)$,作出函数$f(x)$的大致图像,如图1所示.因为$0<a<5$,$0<b<4$,$0<c<3$,所以$0<a<1$,$0<b<1$,$0<c<1$,且$f(a)>f(b)>f(c)$,所以$a<b<c$.

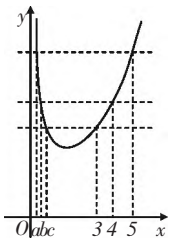

图1

评析:基于“和谐美”,对已知式子

基金项目:福建省教育科学“十三五”规划2020年度课题“基于深度学习的高中数学函数主题单元教学实践研究”(FJJKXB20-724)的阶段性成果.

作者简介:郭海萍(1981—),教育硕士,一级教师,从事高中数学教学研究工作.

作出了恰当的变形,使得其规则与规律显示了起来,实现了数学模型的“同构”,彰显了数学解题的“模型美”和“对称美”.

“和谐美”是数学的一种重要美,表面上杂乱无章的式子,通过和谐的转换,就会显示出规则与规律. 教学中教师要引领学生感知数学的“和谐美”,运用数学的“和谐美”,在美的感受中培养和发展数学抽象、逻辑推理等核心素养.

如问题:(2020年全国Ⅰ卷理科第12题)若$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$,则(　　)

A. $a>2b$　　B. $a<2b$

C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

2. 以“统一”助力直观

基于“统一美”对已知式子作恒等变形,得到右边统一的三个关系式$\frac{e^5}{5}x=e^x$,$\frac{e^4}{4}x=e^x$,$\frac{e^3}{3}x=e^x$,进而借助于一次函数与指数函数$y=e^x$的图像,直观地解决问题.

解析:由已知得$\frac{e^5}{5}x=e^x$,$\frac{e^4}{4}x=e^x$,$\frac{e^3}{3}x=e^x$,且$0<a<5$,$0<b<4$,$0<c<3$,可知a,b,c分别是函数$y=\frac{e^5}{5}x$,$y=\frac{e^4}{4}x$,$y=\frac{e^3}{3}x$与函数$y=e^x$的图像交点的横坐标.

在同一平面直角坐标系中作出上述函数的图像,如图2所示,由于直线$y=ex$与函数$y=e^x$的图像相切于点$(1,e)$,而$\frac{e^5}{5}>e$,$\frac{e^4}{4}>e$,$\frac{e^3}{3}>e$,所以函数$y=\frac{e^5}{5}x$,$y=\frac{e^4}{4}x$,$y=\frac{e^3}{3}x$与函数$y=e^x$的图像均有两个交点,其横坐标均分别在$(0,1)$,$(1,+\infty)$上.

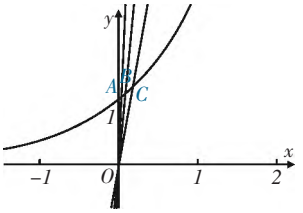

图2

易知5,4,3分别是函数$y=\frac{e^5}{5}x$,$y=\frac{e^4}{4}x$,$y=\frac{e^3}{3}x$与函数$y=e^x$的图像交点的横坐标,但$0<a<5$,$0<b<4$,$0<c<3$,从而$0<a<1$,$0<b<1$,$0<c<1$,直观分析即知$a<b<c$.

评析:基于“统一美”,对已知式子作出了恰当的变形,发现了其图形特征和变化规律,实现了数学解题的直观与简洁,彰显了数学解题的“直观美”和“简洁美”.

“统一美”也是数学的一种重要美,表面上看起来毫不相关的内容,却可以通过一个概念、一个公式统一起来. 教学中教师要引领学生感知数学的“统一美”,运用数学的“统一美”,在美的感受中培养和发展数学抽象、直观想象等核心素养.

再如问题:(漳州市2021届高三毕业班适应性测试)正实数a,b,c满足$a+2^{-a}=2$,$b+3^b=3$,$c+\log_4 c=4$,则实数a,b,c之间的大小关系为(　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

教学建议

数学学习离不开解题,很多学生认为数学枯燥乏味,其最大原因就是没完没了地做题,陷于“题海”不能自拔,很少从“美”的角度去看待问题.

实际上,数学之美无处不在,数学“美”不只是一种审美标准,这种审美效应还能直接作用于数学解题中. 在解题过程中,一旦题目所提供的信息与审美情感吻合,就会激起审美直觉,使人迅速地从“美”的角度确定解题思路,从而使问题得以解决. 在数学教学中,若能适当换个视角去看待解题,让学生欣赏其中的“数学美”,一定能更深刻地把握数学的本质,从而提高数学学习兴趣,提升数学思维品质.

所以,教师要创设“数学美”的认知活动,引领学生在数学活动中感知“数学美”、体悟“数学美”、追寻“数学美”,让思路更加自然顺畅,让数学课堂更加生动有趣,让他们在“美”的感受中分析问题和解决问题,进而培养和发展数学的核心素养.

(上接第81页)

逐问探究,变式拓展,其构建思路、分析方法具有一定的参考价值,下面深入反思,提出相应的建议.

1. 巩固基础,构建体系

上述问题涉及了椭圆、双曲线、直线、向量等众多的基础知识,通常突破问题的第一步是利用基础知识整合信息条件,为后续解题做铺垫. 如求曲线的特征参数,利用弦长公式、点到直线距离求三角形的底或高,以及将向量积转化为函数,等等,基础知识在解题中起到了极为重要的作用. 故教学中要巩固学生的知识基础,构建完整的知识体系,让学生理解所学,活用所知.

2. 总结方法,形成策略

总结、反思是解题探究的重要环节,即完成思路构建后要注意深入思考问题,总结问题突破的关键,反思思路构建过程,形成相应的解题策略. 如上述逐问探究后对解法进行了深入思考,并结合高考考点探讨了问题的常规变式,对于拓展学生的解题视野极为有利. 教学中要立足考题开展解后反思,让学生全面审视问题,思考问题解法,进行解法优化、问题变式.

3. 探究思想,提升素养

解题过程有助于培养学生的解题思维,提升学生的数学素养,尤其是解析过程的思想方法可促进学生的思想提升. 如上述第(3)问充分运用了数形结合、分类讨论、化归转化等思想,实现了抽象问题的直观化,降低了思维难度,简化了解析过程. 教学中要充分利用数学思想进行解题指导,培养学生的数学思维,提升学生的综合素养.