情形1：取4个a球（不取b球），共有$C_4^0(=C_4^4)$种；

情形2：取3个a球（取3个a球、1个b球），共有$C_4^1(=C_4^3)$种；

情形3：取2个a球（取2个a球、2个b球），共有$C_4^2(=C_4^2)$种；

情形4：取1个a球（取1个a球、3个b球），共有$C_4^3(=C_4^1)$种；

情形5：不取a球（全取b球），共有$C_4^4(=C_4^0)$种；

$(a+b)^4$的展开式是：

$$(a+b)^4=C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

3 结束语

都说教无定法，为达成数学本质的理解而人为地拔高知识的理论要求，有时会适得其反．用直观的方式解释数学原理有时略微欠缺严密性，但学生更容易接受，这也未尝不是好的教学方式．当前正处在新课程的转型时期，核心素养的培养是当前数学课堂必须达成的主要任务，为此教学中如若可以应用直观想象进行教学，帮助学生化抽象为具体，化枯燥无味的数学公式为生动活泼的情境问题，效果将更佳．

参考文献

[1]王建磐主编．义务教育课程标准实验教科书数学八年级上册[M]．上海：华东师范大学出版社，2013

[2]彭翕成，杨春波，程汉波．不等式探秘[M]．长沙：湖南科学技术出版社，2015

[3]普通高中课程标准实验教科书数学必修5[M]．南京：江苏凤凰教育出版社，2012

（本文系泉州市教育科学"十四五"规划（第一批）立项课题"基于直观想象核心素养下的中学数学课堂问题导向模式教学实证研究"（课题编号：QG1451-042）、泉州一中"青年教师工作坊"研修项目"素养时代构建专业发展共同体研究初探"的阶段性成果）

引领解题反思　培养核心素养

郭海萍　　福建省福清第一中学（350300）

反思概念在教育领域中的明确运用始于美国著名教育家杜威，他用"反省思维"指称反思，并认为"这种思维就是对某个问题进行有目的的、连续不断的、有严密逻辑的深思"．教学中，学生常常出现思维不清、考虑不周、不求甚解、浅尝辄止等问题和现象，教师应有意识地加以指导，以形成解题反思能力，促进他们数学思维和核心素养的有效发展．本文结合笔者的教学实践，就引领解题反思在培养和发展核心素养上的意义和作用作一阐述，以飨读者．

1 引领错因反思，培养数学抽象素养

对于解题，引领学生对错误原因作反思，不但可以找到改正错误的依据，而且还可以通过对各种可能思路的探究，充分显现学生的思维过程，促使他们进行全方位反思，使他们逐渐由"误"到"悟"．

例 已知S_n,T_n分别是等差数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项和，且满足$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+27}$，求$\dfrac{a_{10}}{b_{10}}$．

分析 部分学生的解答方法如下：

由于$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+27}$①，

不妨设$S_n=(7n+1)k$，

$T_n=(4n+27)k$，k为常数，

于是$a_{10}=S_{10}-S_9=7k$，$b_{10}=T_{10}-T_9=4k$，

得$\dfrac{a_{10}}{b_{10}}=\dfrac{7}{4}$．

显然，这样求解错了．为了让他们找出错因所在，笔者设置了如下问题引领反思．

问题1 可以将等差数列的前n项和都设为n的一次式吗？

经过引领学生反思：假设$S_n=(7n+1)k$，$T_n=(4n+27)k$，因为$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，它一个形如$an^2+bn$的关于$n$的二次式，只有当等差数列是常数数列时，其前$n$项和形如$S_n=an$．

问题2 两个等差数列的前n项和S_n,T_n之比一定是关于n的一次分式吗？

经过引领，发现这一结论是肯定的．

因为 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

$T_n=nb_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d'$，

其中 d, d' 分别是等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公差，

所以 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d}{nb_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d'}$

$=\dfrac{a_1+\dfrac{n-1}{2}d}{b_1+\dfrac{n-1}{2}d'}=\dfrac{nd+2a_1-d}{nd'+2b_1-d'}$，

此时两个等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n, T_n 之比是关于 n 的一次分式．

问题3 至此我们知道 S_n, T_n 是关于 n 的二次式，$\dfrac{S_n}{T_n}$ 是关于 n 的一次分式，那该如何纠正上述的错误解答?

这么一引领，学生清楚了，他们知道了应将 S_n, T_n 化成关于 n 的二次式模型予以求解．

解 设 $S_n=kn(7n+1)$，$T_n=kn(4n+27)$，

于是 $a_{10}=S_{10}-S_9=134k$，

$b_{10}=T_{10}-T_9=103k$，

从而得 $\dfrac{a_{10}}{b_{10}}=\dfrac{134k}{103k}=\dfrac{134}{103}$．

评析 通过上述反思引领，学生从错误解法到正确解答的反思改进中，经历了“从数量与数量关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构”的完整过程，数学抽象等核心素养得到了较好地培养和发展．

2 引领优劣反思，培养数学运算素养

对于解题，我们不能仅仅满足于解答结果，数学解题思路和方法灵活多变，即使一次性解题合理正确，也未必是最优最简捷的解法，我们要重视对解法的反思，以优化解题过程，缩短解题路径．

为了找到更为直接和简洁的解法，笔者设置了如下问题引领学生对求解方法作反思．

问题4 题目告知我们数列前 n 项和的比，而要求的是第10项的比，有更为直接和简洁的解法吗?

这么一引领，学生自然想到了如何将通项的比转化为前 n 项和的比，他们很快给出了如下解法．

解 $\dfrac{a_{10}}{b_{10}}=\dfrac{\dfrac{a_1+a_{19}}{2}}{\dfrac{b_1+b_{19}}{2}}=\dfrac{\dfrac{19(a_1+a_{19})}{2}}{\dfrac{19(b_1+b_{19})}{2}}$

$=\dfrac{S_{19}}{T_{19}}=\dfrac{7\times19+1}{4\times19+27}=\dfrac{134}{103}$．

问题5 若将题目改为求 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 的值，用哪种方法更简捷?学生很自然地选择了后一种方法，轻松将问题解决了．

解 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\dfrac{a_1+a_{2n-1}}{2}}{\dfrac{b_1+b_{2n-1}}{2}}=\dfrac{\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\dfrac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}}$

$=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{14n-6}{8n+23}$．

显然，这一解答比原先的解答简单多了，而且几乎基本没有运算量．

评析 通过上述反思引领，学生对两种解法的优劣进行了比较，经历了“理解运算对象，掌握运算法则，寻求运算方向，选择运算方法，解得运算结果”的完整过程，无疑，数学运算等核心素养得到了较好地发展．

3 引领本质反思，培养逻辑推理素养

学生在数学学习中的难点在于数学问题的千变万化，许多问题在形式上尽管不同，但却可以将其归到同一类型上，因此，我们理应将形异质同的问题进行归类，探求问题的本质，探索解题规律，得出共性，再由共性引导我们去解决同类问题，争取以例及类、以点带面．

为了对问题的本质有更为深入的认识，笔者设置了如下问题引领反思．

问题6 若求 $\dfrac{a_m}{b_n}(m\neq n)$ 的值，以上的两种解法均适用吗?

分析 用方法1求解，

可得 $a_m=S_m-S_{m-1}=k(14m-6)$，

$b_n=T_n-T_{n-1}=k(8n+23)$，

故 $\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{14m-6}{8n+23}$．

用方法2求解，

可得 $\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{\dfrac{a_1+a_{2m-1}}{2}}{\dfrac{b_1+b_{2n-1}}{2}}$

$=\dfrac{\dfrac{(2m-1)(a_1+a_{2m-1})}{2}}{\dfrac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}$

$=\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}=\dfrac{7(2m-1)+1}{4(2n-1)+27}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}$

$=\dfrac{14m-6}{8n+23}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}$．

疑问来了，分别用两种方法求解得出的结果却不一样，为什么?

问题7 哪种解法有问题，问题在哪里?

分析 经过仔细思考，找到了问题的症结，方法2中出错的一步是 $\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{7(2m-1)+1}{4(2n-1)+27}=\dfrac{14m-6}{8n+23}$，已知的是 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+27}$，当分子和分母的中的项数 n 的值不同时，不可以直接代值求值，这个错误具有普遍性和隐蔽性．借助方法1进行纠正，

由 $S_n=kn(7n+1)$，$T_n=kn(4n+27)$，

得 $\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{k(2m-1)\left[7(2m-1)+1\right]}{k(2n-1)\left[4(2n-1)+27\right]}$

$=\dfrac{(2m-1)}{(2n-1)}\times\dfrac{14m-6}{8n+23}$，

于是 $\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}$

$=\dfrac{2m-1}{2n-1}\times\dfrac{14m-6}{8n+23}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}=\dfrac{14m-6}{8n+23}$，

这与方法1求得的结果一致．

至此，我们可以将上述结论一般化：

已知 S_n,T_n 分别是等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{an+b}{cn+d}$，则 $\dfrac{S_m}{T_n}=\dfrac{m(am+b)}{n(cn+d)}$，且 $\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}\times\dfrac{2n-1}{2m-1}$．

问题8 上述哪一种方法更具一般性，渗透了哪些数学思想?

显然方法1更具普遍意义，是解决此类问题的通法．其思想是从函数观点出发，将数列看成一种特殊函数，进而用函数方法予以求解．其实，有许多数列问题可以用函数思想、观点来解决，教师可以紧扣函数的本质，设置相关问题，让学生思考并理解其蕴涵的函数思想．思考如下问题：设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，试求这样的等差数列 $\{a_n\}$，使得对于一切正整数 k 都有 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立．

评析 通过引领，学生对错误进行反思，并将结论一般化，经历了“从特殊到一般的归纳、类比，和从一般到特殊的推理，以及发现问题和提出问题”的完整过程，无疑，逻辑推理等核心素养得到了较好地发展．

总之，解题后教师应引导学生对解题进行深入反思，使学生不仅对数学问题的本质理解得更加透彻，而且对问题中所蕴含的数学思想也能体会得更加深刻．常此以往，学生的思维品质会得到很大的发展，学生的数学核心素养也会得到很好的提升．

参考文献

[1]中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准(2017年版)[M]．北京：人民教育出版社，2018

[2]高金光．思维与反思性思维—杜威反思性教学理论浅析[J]．黑龙江教育学院学报，2006（1）：59-60

[3]郭海萍，陈清华．勤于解题反思 完善解法体系[J]．福建中学数学，2009（2）：15-18

（本文系福建省教育科学“十三五”规划2020年度课题“基于深度学习的高中数学函数主题单元教学实践研究”（课题编号：FJJKXB20-724）的阶段性成果）

追本溯源 激活思维

——一道习题的教学与反思

黄晚霞 福建省莆田第十七中学（351111）

问题是数学的心脏，培养学生利用数学知识与思想方法去解决问题的能力是数学教学核心任务之一．数学标准强调在数学活动中，培养学生分析问题、解决问题的能力，并形成解决问题的一些基