基于数学抽象的函数性质解题应用*

——一次核心素养背景下的高三复习教学设计

福建省福清第一中学　(350300)　郭海萍
福建省福清市教师进修学校　(350300)　林新建

函数性质是函数的重要内容,运用函数性质解决问题是高考命题的主线索,也是学习的难点. 解决这类问题,必须基于函数的结构特点与模型特征,充分运用数学抽象的方法,从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系,从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,进而运用函数性质,如奇偶性、单调性、周期性、对称性等解决问题. 本文以"函数性质解题应用"为例,从"感知背景、抽象特征、概括要义、辨析内涵、深化理解"五个方面入手,就数学核心素养背景下的高三复习教学设计作了一次探析,与同行分享.

1. 数学情境,感知性质应用背景

问题 1　设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$,则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

教师:你如何解这道题? 直接代入解不等式吗?

学生:直接代入无法求解,太繁琐.

追问:不直接代入,我们又该如何求解呢?

设计意图:通过问题引领学生思考解决问题的方法,引起认知冲突,感知"性质应用"背景.

2. 数学探究,抽象性质应用特征

问题 2　你运用哪些知识来解决这个问题的?

学生:用函数的奇偶性和单调性来解决问题.

追问:你是如何想到运用这些知识来解决这个问题的?

学生:函数解析式比较复杂,直接代入求解不等式,无法完成求解,所以考虑从结构上分析函数特征,利用函数性质求解问题.

设计意图:引领学生识别函数模型,思考如何基于函数模型和性质求解问题.

问题 3　(2017 年福建省高三质检理 15 题)已知函数 $f(x)=x^2(2^x-2^{-x})$,则不等式 $f(2x+1)+f(1)\geq 0$ 的解集是__________.

教师:就这个问题,你如何抽象出函数特征,并运用函数性质予以求解?

师生活动:抽象函数 $f(x)$ 的模型特点,发现 $f(x)$ 为奇函数,且在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增,从而运用奇偶性和单调性等知识解决问题.

设计意图:强化认知让学生进一步经历运用数学抽象解决问题的过程,抽象"性质应用"的特征.

3. 数学体悟,概括性质应用要义

问题 4　你能基于上述应用,概括一下"基于数学抽象的函数性质应用"的要义吗?

师生活动:借助数学抽象的方法,抽象出函数的结构特点、模型特征、变化规律等,进而运用函数的性质,如奇偶性、单调性、对称性等分析和解决问题这个过程就是"基于数学抽象的函数性质解题应用"的过程.

问题 5　你能基于对"性质应用要义"的理解,概括一下常见的基本初等函数及其变换模型的结构特点、模型特征和变化规律吗?

师生活动:整理常见的基本初等函数及其结构模型如下表.

基本初等函数	由基本初等函数组合	由基本初等函数变换	分段函数	由基本初等函数复合
$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$ ……	$F(x)=af(x)\pm bg(x)$ $F(x)=af(x)\times bg(x)$ $F(x)=af(x)\div bg(x)$ ……	$F(x)=f(x+a)+b$ $F(x)=f(ax)$ $F(x)=af(x)$ $F(x)=\|f(x)\|$ $F(x)=f(\|x\|)$ ……	$F(x)=\begin{cases}g(x),x\geq a,\\h(x),x<a\end{cases}$ ……	$F(x)=f(g(x))$ ……

*本文是福建省教育科学"十三五"规划 2020 年度课题"基于深度学习的高中数学函数主题单元教学实践研究"(FJJKXB20-724)的阶段研究成果.

设计意图: 引领学生概括“性质应用”的要义,并熟悉基本初等函数及其结构模型,为抽象函数的“结构特点、模型特征和变化规律”以解决问题做准备.

4. 数学内化,辨析性质应用内涵

教师: 为了更好地理解和掌握“性质应用”的内涵,我们再来思考几个问题.

例 1　设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M,最小值为 m,则 $M+m=$________.

师生活动: 抽象函数模型特征,得 $f(x)=1+g(x)$,其中 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$. 由于 $g(x)$ 为奇函数,其图象关于$(0,0)$对称,故 $f(x)$ 的图象关于$(0,1)$对称,由此易知 $M+m=2$.

评析: 当函数结构较为复杂时,应等价改变其形式,向常见的基本初等函数及其变换模型靠拢,进而抽象函数模型特征,挖掘函数所具有的性质,运用性质分析和解决问题.

例 2　(2018 年高考全国卷Ⅰ理 9)已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$,若 $g(x)$ 存在 2 个零点,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

师生活动: 在本题的求解中,大多人将已知条件“函数 $g(x)$ 存在 2 个零点”转换为“方程 $f(x)+x+a=0$ 存在两个实根”,亦即“方程 $f(x)=-x-a$ 存在两个实根”,所以“函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个交点”. 作出函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=-x-a$ 的图象(如图 1),直观直线 $y=-x-a$ 随变量 a 的变化规律,不难感知必须满足 $-a\leqslant 1$,解得 $a\geqslant -1$,故正确选项为 C.

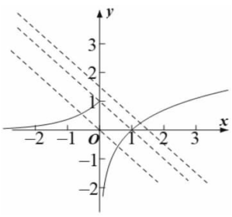

图 1

这样做就麻烦了,其实,$g(x)=\begin{cases}e^x+x+a, x\leqslant 0,\\ \ln x+x+a, x>0,\end{cases}$ 由抽象函数 $g(x)$ 的结构特点与模型特征,可知它在$(0,+\infty)$上递增,且当 $x\to 0$ 时,$g(x)\to-\infty$ 当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$; 在$(-\infty,0)$也递增,且当 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$. 所以要使 $g(x)$ 存在 2 个零点,必须 $g(0)\geqslant 0$,从而由 $g(0)=1+a\geqslant 0$,即得 $a\geqslant -1$,故选 C.

评析: 函数性质的应用,必须借助数学抽象的方法,抽象出函数的结构特点、模型特征和变化规律等,进而有的放矢地选择运用相关的函数性质,如单调性、奇偶性、对称性等来分析问题,则可将问题轻松予以解决.

5. 数学应用,深化性质应用理解

练习　(2013 年高考全国卷Ⅰ理 16)若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称,则 $f(x)=$________,$f(x)$ 的最大值是________.

解析: 若按常规方法求解本题,难度较大,费时费力. 其实,若能抽象出函数 $f(x)$ 的模型特征,则可减小运算量,最终将问题轻松予以解决. 抽象函数 $f(x)$ 有两个零点 $1,-1$,而 $f(x)$ 图象关于直线 $x=-2$ 对称,故 $f(x)$ 另有两个零点 $-3,-5$,所以得 $f(x)=-(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$. 再对 $f(x)$ 的模型特征作抽象感知,若将 $f(x)$ 的图象向右平移两个单位,则其最大值不会随之改变,因此,我们可将求 $f(x)$ 的最大值转化为求函数 $h(x)=-(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$ 的最大值. 至此,直接配方即得 $h(x)=-(x^2-5)^2+16$,所以 $f(x)$ 的最大值为 16.

评析: 函数性质类问题解题的关键在于识别条件的结构特征,理解其内涵蕴意,进而确立解题方向. 上述解法与命题者的参考解答相比较,另辟蹊径,独到新颖,凸显了“数学抽象”在引领特征感知、简化解题途径上的重要作用.

参考文献

[1] 林新建. 培养数学直观能力,发展数学核心素养[M]. 厦门大学出版社,2020.

[2] 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 人民教育出版社,2018.