高考轮次复习重塑和提升学生数学运算能力

郑 琦
（福建省福清第一中学，福建福清 350300）

摘 要：在高考轮次复习中，教师要修复和重塑学生的基本运算能力、基本技巧和验证能力。数学运算能力要求学生解题时目标准确、方法有效，有较强的数学记忆力，能熟练运用概念、公式、定理和方法技巧简洁且迅速答题，并对结果的正确性有一定的检验能力。

关键词：运算基本能力；运算基本技巧；运算验证能力

中图分类号：G427 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-9192(2020)15-0051-03

引 言

数学能力即逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力、分析和解决问题的能力，包括具有学科交点的“数学能力”和反映学生综合素质的“学习潜力”[1]。数学运算能力要求学生解题时目标准确、方法有效，有较强的数学记忆力，以保证熟练地运用概念、公式、定理和方法技巧简洁且迅速地答题，并对结果的正确性有一定的检验能力。高考轮次复习数学运算能力的重塑和提升，必须注重运算基本功和技能形成过程，强调解题的规范性和数学语言的逻辑性，不因解答不规范、运算出错影响逻辑推理过程，从而改变思路导致失分。

【重塑和提升运算能力例析】近年来，高考对学生数学运算能力的考查已经实现了与逻辑思维能力、空间想象能力、几何图形的结合，并在思维与运算的交汇处考查学生运算能力。因此，在高考轮次复习中，教师要对学生从运算基本能力、基本技巧和验证能力三大方面进行修复和重塑。其中，运算基本能力包括移项、通分、因式分解 、代入消元法和配方法等；运算基本技巧包括换元法、配凑法、放缩法、中间量法、分离变量法、分离常数法、估值法、消参法等；运算验证能力，

现。按照结构，英语句子可分为三大类：简单句、并列复合句和主从复合句。

简而言之，一个句子（sentence）只能有一个谓语动词。若再有谓语动词，必须有并列连词连接或使其成为从句的谓语动词；或者把该谓语动词变成非谓语动词。英语句子的动词各司其职、分工明确。例如：

1. The trees are extremely tall, <u>some **measuring** over 90 metres</u>.

(新课标 Book 3，Unit5, Page34)

2. The trees are extremely tall, <u>and</u> some **measure** over 90 metres.

3. The trees are extremely tall, <u>some of which **measure** over 90 metres</u>.

我们不难看出：句 1 为简单句，句 2 为并列复合句，句 3 为主从复合句。三个句子意思相同，而表达形式却是多样化的。

作为英语教师，我们要善于挖掘、处理甚至精简课本知识，从而使教学目的更加明确，以此实现课堂教学效率的最大化。

（三）句型的强化训练

英语学习作为非母语的学习，学生从“懂”到“会”还有很远一段距离，所以仅让学生明白一些语言法则是远远不够的。那么，具体的句型训练该如何实施呢？例如：

1.Show <u>your passport</u>, please. 名词

2.She didn't say <u>anything</u>. 代词

3.—How many do you want? — I want <u>two</u>. 数词

4.They sent <u>the injured</u> to the hospital. 名词化的形容词

5.They asked <u>to see my passport.</u> 不定式

6.I enjoy <u>working with you</u>. -ing 形式

7.Did you write down <u>what he said</u>? 从句

以上例句显然是在考查宾语。宾语可以是名词、代词、数词等。在进行模板句型训练时，我们可以从句子成分入手，也可以从非谓语动词、并列句及复合句的句型相互转换入手。

句型训练如何实施，取决于具体教学目的是什么。我们只有通过示例演绎、精练讲解等，让学生进行针对性的句型训练，才能贯彻“目标引领，活动达成”这一教学理念。

结 语

总之，在高中英语教学中，我们应遵循“先简单，再全面”的原则。学生在有效学习方法的指导下，通过模板句型仿写、强化训练，融入非谓语动词（独立主格）、从句等语言输入形式，使其将吸收到的理论知识内化为熟练的技能，顺利完成语言输出，从而实现句子意识的培养。在练中学，在学中练，在练中悟，使学生形成英语句子的自我构建能力，从而提升学生的语言表达能力。

[参考文献]

[1] 盛桓 . 含意运用与常规关系意识 [J]. 外语与外语教学，1998(03)：3-7+56.

作者简介：罗月玲（1983.12-），女，湖北咸宁人，中学二级教师，在校期间曾获“国家级二等奖学金”，获孝感市高中英语说课比赛一等奖，论文《结合考纲，提高英语写作教学的实效性》在“中国梦·全国优秀教育教学论文评选大赛”中荣获一等奖。

包括对元素互异性、极值点参数值、离心率范围、直线和圆锥曲线有交点的情况等进行验证 [2]。从计算关再结合知识关、思想方法关的角度来审视高考常见计算基础专题题型，它有以下设计亮点。

【设计亮点 1】求解与抽象函数有关的不等式题型，一般是利用函数单调性将“f”符号脱掉，使其转化成具体不等式求解。遇到分段函数，“对段入则”，可结合分段函数图像减少分类讨论量和计算量。

例 1：设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是______.

解析：方法一，

①当 $\begin{cases}x+1\leqslant 0\\ 2x\leqslant 0\end{cases}$，即 $x\leqslant -1$ 时，$f(x+1)<f(2x)$，

即为 $2^{-(x+1)}<2^{-2x}$，即 $-(x+1)<-2x$，解得 $x<1$.

因此，不等式的解集为 $(-\infty，-1]$.

②当 $\begin{cases}x+1\leqslant 0\\ 2x>0\end{cases}$ 时，不等式组无解.

③当 $\begin{cases}x+1>0\\ 2x\leqslant 0\end{cases}$，即 $-1<x\leqslant 0$ 时，$f(x+1)<f(2x)$，

即 $1<2^{-2x}$，解得 $x<0$.

因此，不等式的解集为 $(-1，0)$.

④当 $\begin{cases}x+1>0\\ 2x>0\end{cases}$，即 $x>0$ 时，$f(x+1)=1$，$f(2x)=1$，不合题意.

综上，不等式 $f(x+1)<f(2x)$ 的解集为 $(-\infty，0)$.

方法二，当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=2^{-x}$ 是减函数，

则 $f(x)\geqslant f(0)=1$.

作 $f(x)$ 的大致图像如图 1 所示，

结合图像可知，要使 $f(x+1)<f(2x)$，

则需 $\begin{cases}x+1<0\\ 2x<0\\ 2x<x+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ 2x<0\end{cases}$，所以 $x<0$，

即不等式 $f(x+1)<f(2x)$ 的解集为 $(-\infty，0)$.

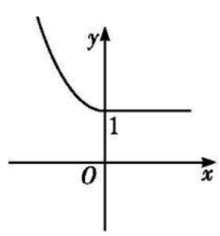

图1 函数图像

【设计亮点 2】从全局化繁为简到局部结构处理，用一元二次函数部分图像分类讨论或分离参数法，再结合构造法和求导法，化归为求 c 与 $f(x)$ 值域大小关系的问题，最后要注意等号问题。

例 2：若函数 $f(x)=(x^2-cx+5)e^x$ 在区间 $[\frac{1}{2}，4]$ 上单调递增，则实数 c 的取值范围是______.

解析：函数 $f(x)=(x^2-cx+5)e^x$ 在区间 $[\frac{1}{2}，4]$ 上单调递增，则 $f'(x)=[x^2+(2-c)x+(5-c)]e^x\geqslant 0$ 在区间 $[\frac{1}{2}，4]$ 上恒成立，即 $x^2+(2-c)x+(5-c)\geqslant 0$ 在区间 $[\frac{1}{2}，4]$ 上恒成立，即 $c\leqslant\frac{x^2+2x+5}{x+1}$ 在区间 $[\frac{1}{2}，4]$ 上恒成立.

令 $g(x)=\frac{x^2+2x+5}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$；

令 $g'(x)=0$，则 $x=1$，或 $x=-3$；

当 $x\in[\frac{1}{2}，1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；

当 $x\in(1，4]$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数.

故当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取最小值 4，故 $c\in(-\infty，4]$.

【设计亮点 3】直接用两角和差、正余弦、正切公式拆括号，涉及解方程组，计算量大。观察发现，条件角和结论角存在特殊数量关系，结合整体法和诱导公式，拆分复合角，减少计算量。

例 3：已知 θ 是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$ 为______.

解析：θ 是第四象限角，

所以 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$.

由于 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，所以 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}$，

$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sin(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=-\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{4}{5}$，

$\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\cos(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，

$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}=-\frac{4}{3}$.

【设计亮点 4】在解三角形问题时渗透减元思想，运用内角和定理、正余弦定理减少三角函数名和角的个数。

例 4：$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c。已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则 $C=$______.

解析：$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，

$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$.

因为 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，

所以 $\sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，

$\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，

$\cos A\sin C+\sin A\sin C=0$.

因为 $\sin C>0$，

所以 $\sin A+\cos A=0$，$\tan A=-1$.

又因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $A=\frac{3\pi}{4}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，$\sin C=\frac{1}{2}$，$C$ 为锐角，等于 $\frac{\pi}{6}$.

【设计亮点 5】用公式法化同名或用换元法转为一元二次函数型求复合三角函数的最小正周期、单调区间、对称轴、对称中心和最值。

例 5：函数 $y=2\cos^2x-1+2\sin x\cos x$ 的单调递减区间为______.

解析：$y=2\cos^2x-1+2\sin x\cos x=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$，

令 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in \mathbf{Z}$，

得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{5\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$.

例 6：函数 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域为______.

解析：设 $t=\sin x+\cos x$，

则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ (-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，

$y=t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$.

当 $t=\sqrt{2}$ 时，y 取最大值为 $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$；

当 $t=-1$ 时，y 取最小值为 -1.

所以，函数值域为 $[-1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}]$.

【设计亮点 6】解圆锥曲线最值问题可以采取的方法：一是几何法，通过曲线定义、几何性质以及平几定理、性质等求解；二是代数法，把最值的几何量表示为某个（些）参数的函数（解析式），用求导法、复合函数单调性法则，不满足“一正二定三相等”，则可适当变形后用基本不等式求最值。

例 7：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1 和 F_2，由 4 个点 $M(-a,b)$、$N(a,b)$、F_2 和 F_1 组成一个高为 $\sqrt{3}$、面积为 $3\sqrt{3}$ 的等腰梯形。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 过点 F_1 的直线和椭圆交于两点 A、B，求△F_2AB 面积的最大值.

解析：(1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由 (1) 知 $F_1(-1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

过点 F_1 的直线方程为 $x=ky-1$，

由 $\begin{cases}x=ky-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3k^2+4)y^2-6ky-9=0$，$\Delta>0$ 成立，

且 $y_1+y_2=\frac{6k}{3k^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3k^2+4}$，△$F_2AB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|(|y_1|+|y_2|)=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{36k^2}{(3k^2+4)^2}+\frac{36}{3k^2+4}}=12\sqrt{\frac{k^2+1}{(3k^2+4)^2}}=\frac{12}{\sqrt{9(k^2+1)+\frac{1}{k^2+1}+6}}$.

又因为 $k^2\geqslant0$，所以 $9(k^2+1)+\frac{1}{k^2+1}+6$ 递增，所以 $9(k^2+1)+\frac{1}{k^2+1}+6\geqslant9+1+6=16$，$\frac{12}{\sqrt{9(k^2+1)+\frac{1}{k^2+1}+6}}\leqslant\frac{12}{\sqrt{16}}=3$. 当且仅当 $k=0$ 时取得等号，所以△F_2AB 面积的最大值为 3.

【设计亮点 7】解析几何中的定点和定值问题，借“设而不求”减少计算量。

例 8：已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{1}{2}$，以坐标原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{6}=0$ 相切。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 $P(4,0)$，A、B 是椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两个不同的点，连接 PB 交椭圆 C 于另一点 E，证明直线 AE 与 x 轴相交于定点.

解析：(1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 证明：由题意知，直线 PB 的斜率存在，设其为 k，则直线 PB 的方程为 $y=k(x-4)$.

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2-12=0\\ y=k(x-4)\end{cases}$，可得 $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

设点 $B(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$，则 $A(x_1,-y_1)$，

$x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3}$，　①

$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}$，　②

由于直线 AE 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

所以令 $y=0$，

可得 $x=x_2-\frac{y_2(x_2-x_1)}{y_2+y_1}=x_2-\frac{k(x_2-4)(x_2-x_1)}{k(x_2-4)+k(x_1-4)}=\frac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{x_1+x_2-8}$。

①②代入上式可解得 $x=1$，所以直线 AE 与 x 轴相交于定点 $(1,0)$。

【设计亮点 8】用构造法构造 e 的方程或不等式求 e 的值或取值范围。

例 9：(1) 已知 F_1、F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，则 C 的离心率 =______.

(2) 已知直线 l：$y=kx+2$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点 B 和左焦点 F，且被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为 h。若 $h\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则椭圆离心率 e 的取值范围是______.

解析：(1) 由题设可知 $\angle F_1PF_2=90°$，$\angle PF_2F_1=60°$，$|F_1F_2|=2c$，所以 $|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$。由椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，即 $\sqrt{3}c+c=2a$，所以 $(\sqrt{3}+1)c=2a$，故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

(2) 依题意知 $b=2$、$kc=2$，设圆心到直线 l 的距离为 d，则 $h=2\sqrt{4-d^2}\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$，解得 $d^2\leqslant\frac{16}{5}$。又因 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $\frac{1}{1+k^2}\leqslant\frac{4}{5}$，解得 $k^2\geqslant\frac{1}{4}$. 于是，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2+c^2}=\frac{1}{1+k^2}$，所以 $0<e^2\leqslant\frac{4}{5}$.

结　语

高考轮次复习要重视数学运算中的常用运算工具，如向量法（法则法、坐标法）解决和解析立体几何问题，构造函数法、求导法和图像法齐头并进解决函数零点和极值点问题，同时重视公式定理推导过程。这有助于修复和重塑学生数学运算能力，发现出题者的命题意图，更好地引导学生学习数学知识。

[参考文献]

[1] 李香瑞.浅谈影响学生运算能力的成因与突破[J].教育实践与研究(中学版),2009(01):62.

[2] 何连蒙.论高中数学思维障碍的成因及其突破方法[J].内蒙古师范大学学报(教育科学版),2006(S2):152-154.

作者简介：郑琦（1980.11-），女，福建福清人，本科学历，中学一级教师。