培养学生直观想象能力的若干策略

——以三角函数教学为例

叶诚理
（福建省福清第一中学，福建福清 350300）

摘　要：直观想象能力是数学教学注重培养学生的重要能力，不仅有助于学生更深入地理解代数与几何之间的化归问题，还关联着多种数学思想的综合运用。本文以人教A版的三角函数模块的课堂教学为例，阐述培养学生直观想象能力的策略。

关键词：直观想象能力；三角函数；培养策略
中图分类号：G427　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**2095-9192(2020)30-0075-02

引　言

知识高度复合的三角函数教学中体现直观想象能力，应以其函数的主要特征联想到包含其他局部知识点的总括方式，把握住想象的两大特点：一是整体模型化。在三角函数题型中涉及范围领域、发展运动领域的知识点考查中，要对解题答案进行全面的预判，防止在内容、方法的选择上陷入局部思维[1]。二是抽象具体化。在解题过程中，要对题干中三角函数的主要特点进行具象化迁移，使其所考查的知识点呈现出具体表象特征，能通过直接联想到可视、可感的形象来厘清解题思路的正确与否。

一、直观想象能力在三角函数中的重要性

直观想象能力本质上是一种人的思维产物，在数学中体现为一种整体思维。

例题1：已知α是第二象限角，那么$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角?

这道题是三角函数的基础知识运用，然而此题的错误率并不低。许多学生直观地判断为“第一象限角”。此题考查学生的整体性思维：由于$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$），当$k$为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角，而当$k$为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角。

例题2：与$-\frac{14\pi}{3}$终边相同角中最小的正角是（　）。

A. $\frac{4\pi}{3}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $-\frac{2\pi}{3}$

此题考查的是终边相同角的基本公式$\alpha+2k\pi$（$k\in Z$）。不少学生直观认为$-\frac{14\pi}{3}=5\pi+\frac{\pi}{3}$，贸然选择了选项B，应用了错误的三角函数的周期$k\pi$。

由上述举例可见，三角函数中一些简单易错题型往往是利用局部思维漏洞设计的。而许多学生在发展自身数学思维的同时，将“第一印象”或“直观判断”当作直观想象能力的一部分，从而陷入对直观想象能力认识不全面的误区。教师在解题中，要分析、判断学生陷入了哪种思维方式的误区，将直观想象能力“从整体到具体”的原则传授给学生，使学生能够第一时间反应出题目考查的主要知识点，认清三角函数问题的本质。

二、培养学生直观想象能力的有效策略

（一）训练学生画思维导图

以人教版数学教材为例，每一本教材前面都有章节目录，起到了揭示各章之间的内部逻辑关系的作用，可以转化为一张组织关系思维导图。教师可以引导学生通过对章节目录进行作图训练，明确教学内容之间的关系与逻辑安排，搭建好知识之间的“脚手架”，培养学生构建数学知识网络的能力。

数学教师应培养学生将知识网络中的知识点转化应用的习惯，如对知识点纵向进行思维链接，与学生一起回忆各种与直观想象能力有关的数学思想，通过这种纵向比较，使学生感觉到数学思想就在身边[2]。

（二）深挖数学知识背后的生活经验

掌握直观想象能力的前提是拥有解决新问题的思维工具。在三角函数教学中，数学思想是最重要的思维工具。根据《普通高中数学课程标准（2017年版）》可知，“数学思想蕴含在数学知识形成、发展和应用的过程中，是数学知识和方法在更高层次上的抽象与概括”。

相较于其他数学知识，三角函数更抽象与概念化，而非直观易懂、可操作的图像。学生在直观想象能力“整体性”培育方面，要突破思维不可逆的局限性，掌握公式与图像之间的转化，认识三角函数的形成过程。进一步来说，三角函数是由最基础的函数知识产生并发展而来的，并不是孤立地通过精神活动而被创造出来的。三角函数的每个知识点实际上都深度链接人们的生活、常识、活动经验。

三、以“三角函数”教学为例来看学生直观想象能力的培养

（一）教学设计

从“三角函数”的教学目标来看，“培养学生直观想象能力”应归属于“情感态度与价值观”范畴。基于此，笔者在教学设计中将“培养学生观察分析、类比归纳的探究问题的能力”纳入“情感态度”目标。

由于我国文字不是拼音文字而是会意文字，学生在接受以拼音文字为主的符号语言时，难以与图像语言建立思维的联系，不容易抓住三角函数教学内容的学习技巧和规律。例如，

在教学“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像”一课时，一些学生反映教学内容过于复杂，难以抓住知识点之间的内在逻辑关系。基于此，笔者设计了一种由简到繁、由旧知识到新知识的教学思路，先引导学生复习正弦函数的旧知识 $y=\sin x$ 及其图像特点，通过引入 φ、A　ω，使学生在自己熟悉的图像上发现知识点之间的内在联系，再讲解 $y=\sin(2x+1)$ 与 $y=\sin 2x$ 之间的图像变换规律，使学生发现解决新问题可用的旧知识，面对变量的增加，引导学生通过控制变量的数量使复杂问题转变为自己擅长的一般问题，通过教师直观地“做加法”和学生直观地“做减法”，逐步使学生熟悉复合函数，最后让学生自主探索，争取自己解决问题，以提高学生的直观想象能力，发挥学生的主体作用。

（二）授课中培养学生直观想象能力

以常见的学生使用直观想象能力产生错误的情况试举一例：把函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，在不改变纵坐标的情况下，在原来的基础上缩短所得图像各个点横坐标，进而得到相应的解析式。在这个过程中，许多学生对平移的变换对象产生了错误的认识，在思维导向中产生了如下过程：把原函数的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，得 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8})=\cos(2x+\frac{\pi}{8})$，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得 $y=\cos(4x+\frac{\pi}{8})$。笔者在教学实践中发现，学生的解题速度很快，但并没有结合图像对题目做出正确理解。这是一种“直线性思维”而非“直观想象能力”。由于在解题过程中并没有第一时间在头脑中构建空间模型，学生对该题目考查的空间向量没有产生理解性认识。

还有部分学生在解题过程中的思维路线如下：向右平移原函数图像 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，得 $y=2\cos(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=\cos2(x+\frac{3\pi}{8})$，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得 $\cos4(x+\frac{3\pi}{8})$。这个现象显示出学生的思维脱离了整体性，把 $2(x+\frac{\pi}{2})$ 当成了变换对象，而没有考虑整体变化。

实际上，这道题的正确解题方法为：向右平移原函数图像 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，得 $y=\cos[2(x-\frac{\pi}{8})+\frac{\pi}{4}]=\cos 2x$，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得 $\cos 4x$。

实际上，学生对三角函数平移关系的规律还没有掌握，即“左加右减、上加下减”，没有经过自身的实践、经验观察，只停留在表面认识上，导致直观想象能力的培养缺少了物质基础。左右平移只针对变量 x，上加下减只针对变量 y，在三角函数图像平移方面，直观想象能力的基础表现是抓住变换对象，而不是将其他因素一并代入，使解题过程总体上偏离知识考查的目的。

（三）在习题课后回顾中总结直观想象能力的体现

在三角函数习题课后回顾中，笔者对学生做了简单的问卷调查：“通过本节课习题的学习，你最大的体验是什么？是否真正掌握了直观想象能力的运用方法?”习题设计意图是培养学生对直观想象能力的正确运用。而根据学生反馈，其主要发生的错误现象是找不准习题的研究目标。例如，“复合函数的单调性”习题课中有这样一题：$y=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-2x)-3$ 的单调递增区间是？部分学生的思维立刻被正弦函数的单调区间主导。解题过程如下：令 $t=\frac{\pi}{4}-2x$，即 $y=\sqrt{2}\sin t-3$；因为 $y=\sin t$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in Z)$ 上是递增关系，所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{4}-2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in Z)$，最终得出 $-\frac{\pi}{8}+kx\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+kx$ $(k\in Z)$，但如果就此解答就陷入了一个误区：正弦函数的单调区间与复合函数的单调性两个知识点被该部分学生混为一谈了。该题干中 x 前的系数是负数，因此题干中函数 $y=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-2x)-3$ 实质就是 $y=\sqrt{2}\sin t-3$ 与一次函数 $t=\frac{\pi}{4}-2x$ 形成的复合函数。这道题的考点是复合函数的单调性。学生要利用复合函数“同增异减”的性质进行解答。在此，教师可以利用对比演示法，让学生认识到自己使用直观想象能力的错误之处：先入为主，意识到第一眼印象不是直观想象能力的表现形式。此外，教师还可以根据直观比较后梳理正弦函数和复合函数之间的内容联系，并引导学生复习回顾自己知识使用的错误之处。

结　语

直观想象能力的培养不是一步到位的，它是从三角函数基本图像所体现的数学思想出发的。判断一种三角函数题目的直观想象能力体现应是第一眼发现研究对象的本质，不能采用直接判断、遂下定论的解题思路。出题者与考生两者之间类似于一种智力游戏关系。学生运用直观想象能力应敏锐地察觉出题者考查知识点的用意，而不能以表面形式进行判断，一头钻进题海套路中。总之，直观想象能力的培养不是一朝一夕的事情，需要教师在日常的教学中有意识地进行渗透，不是过分训练学生的解题速度，而是善于运用教学智慧引导学生通过直观想象发现题目中所考查的知识内容并领悟所用到的数学思想方法，从而全方位提升学生的核心素养[3]。

[参考文献]

[1] 钟木森.培养直观想象能力　发展数学核心素养[J].中学教学参考,2019(26):29−30.

[2] 梁旦.基于逻辑思维视野下高中数学教学策略探究[J].科学咨询(教育科研),2020(09):252.

[3] 王华文.新课程背景下高中数学教学方法探索[J].科学咨询(教育科研),2020(09):281.

作者简介：叶诚理（1979.4−），男，福建福清人，硕士学位，一级教师。