$=1$，

当 $x_1=1, x_2=0, x_3=0$ 时不等式等号成立，

故所求的最小值为 1．

因为 $(x_1+ax_2+bx_3)(x_1+\frac{x_2}{a}+\frac{x_3}{b})$

$=\frac{1}{a}(x_1+ax_2+bx_3)(ax_1+x_2+\frac{a}{b}x_3)$

$\le\frac{1}{4a}((a+1)x_1+(a+1)x_2+\frac{b^2+a}{b}x_3)^2$

$\le\frac{1}{4a}((a+1)x_1+(a+1)x_2+(a+1)x_3)^2$

$=\frac{(a+1)^2}{4a}$，

当 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=0$ 时不等式等号成立，

故最大值为 $\frac{(a+1)^2}{4a}$．

同理，不难将结论 1 推广到 n 元不等式．

结论 2 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1$，且 $a_i>a_{i+1}>1(i\in\mathbf{N}_+)$，则 $(x_1+a_1x_2+a_2x_3+\cdots+a_{n-1}x_n)(x_1+\frac{x_2}{a_1}+\frac{x_3}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_{n-1}})$ 的最小值为 1，最大值为 $\frac{(a_1+1)^2}{4a_1}$．

与 2018 年全国卷Ⅰ理数 21 题相关的双边不等式

余小萍[1]　　李云杰[2]

1 福建省福清市第一中学（350300）　2 福建省福清市教师进修学校（350300）

2018 年高考已经落下帷幕，其中不乏好题值得我们去研讨，全国Ⅰ卷理科数学压轴题就是其中比较有味道的一道，本文得到与之相关的一个双边不等式．

试题 （2018 年高考全国Ⅰ卷·理 21）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$．

定理 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$ 存在两个极值点 x_1, x_2，则 $\frac{4}{3a}(a-2)<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{7a+6}{15a}(a-2)$．

证明 由（1）得 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$．由于 $f(x)$ 两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$．不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$．

由 $x_2^2-ax_2+1=0$，得 $a=x_2+\frac{1}{x_2}$，

且 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}-2$，

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{4}{3a}(a-2)$

等价于 $(x_2+\frac{1}{x_2})\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}-2$

$>\frac{4}{3(x_2+\frac{1}{x_2})}[(x_2+\frac{1}{x_2})-2]$，

等价于 $\ln x_2-\frac{5x_2^4-4x_2^3+4x_2-5}{3(x_2^2+1)^2}>0$，

令 $p_1(x)=\ln x-\frac{5x^4-4x^3+4x-5}{3(x^2+1)^2}\ (x>1)$，

由于 $p_1'(x)$

$=\frac{1}{x}-\frac{4(5x^3-3x^2+1)(x^2+1)^2-(5x^4-4x^3+4x-5)4x(x^2+1)}{3(x^2+1)^4}$

$=\frac{(3x^2+8x+3)(x-1)^4}{3x(x^2+1)^3}>0$，

且 $p_1(1)=0$，

从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p_1(x)>0$，

所以 $p_1(x_2)>0$，

即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{4}{3a}(a-2)$．

同理 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{7a+6}{15a}(a-2)$

$\Leftrightarrow (x_2+\dfrac{1}{x_2})\dfrac{-2\ln x_2}{\dfrac{1}{x_2}-x_2}-2$

$<\dfrac{7(x_2+\dfrac{1}{x_2})+6}{15(x_2+\dfrac{1}{x_2})}[(x_2+\dfrac{1}{x_2})-2]$，

$\Leftrightarrow \dfrac{7x_2^6+22x_2^5-5x_2^4+5x_2^2-22x_2-7}{30x_2(x_2^2+1)^2}-\ln x_2>0$，

令 $p_2(x)=\dfrac{7x^6+22x^5-5x^4+5x^2-22x-7}{30x(x^2+1)^2}-\ln x(x>1)$，

求导并整理得 $p_2'(x)=\dfrac{(7x^2+12x+7)(x-1)^6}{30x^2(x^2+1)^3}>0$，

且 $p_2(1)=0$，

从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p_2(x)>0$，$p_2(x_2)>0$，

即 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{7a+6}{15a}(a-2)$．

（本文系福建省教育科学规划立项课题《基于学科核心素养的数学解题教学研究》（课题立项批准号：FJJKXB17-450）的研究成果）

关于等差等比数列的组合数列前 n 项和

罗　彪　　贵州师范大学数学科学学院（550001）

1 研究背景

高中学生在学习了人教版普通高中数学课程标准实验教科书必修 5 第二章数列的内容后，初步掌握了等差数列和等比数列前 n 项和公式 S_n．学生已经熟知了倒序相加法、递推公式法、错位相减法等求数列前 n 项和 S_n 的方法．基于学生已有的学习经验，大多数学生能单独地进行等差、等比数列的题目解答，但对于由等差数列与等比数列组合成的混合数列（差比数列）的解答尤为困难．缺乏对教材内容的深入理解，联系和发现问题的能力较差．学生在学习过程中，只注重结果而忽视了过程．即只注重公式的记忆，而忽视推导过程．

本文旨在培养学生的逻辑推理能力和数学运算能力，基于此，以下介绍由常见的等差等比数列组合成新数列的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 推导，供读者参考．

题源　（人教版必修 5 P61 页习题 A 组 4）求和：

（1）$(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$；

（2）$(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$；

（3）$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$．

分析　基于这道题目（1）（2），计算相对容易，大多数学生基本都能把它们拆分成等比数列与等差数列的和差形式，但题目（3）相对较难，多数学生无从下手．其原因是在学习等比数列的前 n 项和公式中忽视推导过程，只是停留在公式的记忆．缺乏如等比等差数列再创造，构建诸如等差等比数列的新模型．

这里基于高中学生已有的等差等比数列，学习的最近发展区是构建差比积（商）数列，再提出差比型数列．其学习知识的过程是：等差数列等比数列→差比积（商）数列→差比型数列．

解析　（1）原式 $=(a+a^2+\cdots+a^n)-(1+2+\cdots+n)$

$=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-\dfrac{n(1+n)}{2}$．

（2）$(2+4+\cdots+4n)-(3\times5^{-1}+3\times5^{-2}+\cdots+3\times5^{-n})$

$=n(n+1)-\dfrac{3}{100}(1-5^n)$．

（3）设 $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}(x\neq1$ 或 $0)$ ①，

则 $xS_n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ ②．

①-②得 $(1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+x^{n-1}+\cdots-nx^n$，

则 $S_n=\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$．

2 拓展定义

定义 1　若由一个等差数列 $\{a_n\}$ 和一个等比数列 $\{b_n\}$，每一项是 $c_n=a_n\cdot b_n$，组合成一个新数列 $\{c_n\}$，称新数列为差比积数列，其前 n 项和记为 T_n．

定义 2　若由一个等差数列 $\{a_n\}$ 和一个等比数列 $\{b_n\}$，每一项都是 $k_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，组合成一个新数列 $\{k_n\}$，称新数列为差比商数列，其前 n 项和记为 K_n．

3 对应公式

3.1 拓展公式